数理解析研究所講究録
364巻 1979年 16-24

On a theorem of Koebe

北大 理学部 田中 博

§0 序文 N. Boboc and G. Mocanu [1] は開リーマン面上へ調和測度を用いて等角不変な距離を定義し，それを harmonic metric とよんだ．他方，T. Kuusalo [5] はリーマン多様体上へ曲線族のモジュールを使って距離を定義し，それを quasiconformal metric とよんだ． この報告（[8] に含まれる）では，開リーマン面上で上の二つの距離の間にどのような関係があるかを調べ，さらに後者の距離を使って，Koebe の定理をリーマン面上で定義されている正則函数へ拡張する． この報告でモジュールに関連した結果はそのまま高次元空間の場合にも成り立つことに注意する．

§1 記号と準備 以下では [3] で用いられている記号や用語はそのまま使う．R を開リーマン面とし，K_0 を R の退化しない連続体で，その補集合 $R_0 = R - K_0$ は連結とする．曲線族 Γ のモジュールは $M(\Gamma)$ であらわす．

GをRの部分領域とし，A，Bを空でないGの部分集合とする．このとき $\Delta(A, B; G)$ でAとBをG内で結ぶ曲線族の全体をあらわす．つぎの二つの補題が得られる．

<u>補題</u>1．　KをRのコンパクト部分集合とし，Γ_KでKから出発して，R内に集積しない曲線族の全体をあらわす．このとき

$$M(\Gamma_K) = \|\omega(K)\|^2 = C(K)$$

が成り立つ．ただし，Rが放物型のときはすべてのKに対して $C(K)=0$ と定めておく．

<u>補題</u>2．　KをR_0のコンパクト部分集合とする．このとき，つぎが成り立つ．

$$M(\Delta(K, K_0; R)) = \|\tilde{\omega}(K)\|^2 = \tilde{C}(K).$$

§2　等角不変な距離とリーマン面の完備化

GをRの部分領域とし，$a, b \in G$に対して，$C_{a,b}(G)$で，aおよびbを含むG内の連続体の全体をあらわす．

定義1 [1]　$z \in R$ を固定する．$a, b \in R-\{z\}$ に対して，

$$H_z(a,b) = H_z(a,b;R) = \inf\{\omega_z(K);\ K \in C_{a,b}(R-\{z\})\}$$

と定める．

定義2 [5, 7]．　$a, b \in R_0$ に対して，

$$d(a,b) = d(a,b;R,K_0) = \inf\{M(\Delta(K,K_0;R));\ K \in C_{a,b}(R_0)\}$$

と定める．

定理1 [1, 5, 7]．　R を開リーマン面とする．

(1)　H_z が $R-\{z\}$ 上の距離となるのは R が双曲型のときに限る．

(2)　d は常に R_0 上の距離になる．

これらの距離から導入される位相は R の元の位相と一致する．

定義3 (cf. [6])．　G を R の相対コンパクトな領域とする．G が $\zeta \in \partial G$ で conformally connected (resp. quasi-conformally connected) であるとは，単調減少する ζ の近傍の列 $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ で，各 $U_k \cap G$ が連結で，かつ $\omega_z(U_k \cap G) \to 0$ (resp. $M(\Delta(U_k \cap G, K_0; G)) \to 0$)

$(K_0 \subset G)$ as $n \to \infty$ となるものが存在するときをいう。ただし，$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{\zeta\}$ は仮定しない。

とくに，G が ∂G の各点で conformally connected (resp. quasiconformally connected) であるとき，G は ∂G 上でそうであるという。

<u>定義</u>4. 開リーマン面 R の H_z および d に関する完備化をそれぞれ R^*_H，R^*_d であらわす。

<u>定理</u>2. G が R の相対コンパクトな領域で，かつ，∂G 上 conformally connected (resp. quasiconformally connected) ならば，G^*_H (resp. G^*_d) はコンパクトである。しかし，これらがコンパクトであっても，G が ∂G 上 conformally connected，あるいは quasiconformally connected であるとは限らない。

<u>証明</u>. G は ∂G 上 conformally connected であると仮定する。K を z を中心とした閉円板で G に含まれるものとする。このとき仮定により $G-K$ が H_z に関して全有界なことがわかる。従って G^*_H はコンパクトである。

つぎに，G として $\{|z|<1\} - \{0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ をとると，G は単位開円板と等角同型であるから，G^*_H はコンパクト

になる．しかし容易にわかるように，G は ∂G 上（特に実軸上）conformally connected ではない．quasiconformal part も全く同様である．

定理3．G が ∂G 上 quasiconformally connected ならば conformally connected であり，従って，G_H^* は G_d^* の商空間である．しかし G_d^* が G_H^* の商空間になるとは限らない．

証明 前半は容易に示される．後半の証明のために，[2]の定理1の証明に使われている例を使う．この例を少し変形して，radial slits を持つ単位円板 Ω は実軸に関して対称であるとしてよい．$K_0=\{|z|\leq\frac{1}{2}\}$ とおくとき，この例は $M(\Delta(\{|z|=1\}, K_0 ; \Omega)) = 2/\log 2$ であるが，Ω の外部境界 $\{|z|=1\}$ の Ω に関する調和測度は 0 であることを示している．したがって，Ω_H^* の位相では $\{|z|=1\}$ が一点に対応している．しかし Ω_d^* の位相では一点に対応していない．仮に，Ω_d^* の位相でも $\{|z|=1\}$ が一点に対応していたとする．このとき実数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，

$$r_n, -r_n \in \Omega,\quad r_n \to 1,\quad d(-r_n, r_n) \to 0$$

となるものが存在する．このとき，各 n に対して，$\Omega - K_0$ 内のジョルダン弧 α_n で $-r_n$, r_n を結び，かつ，

$$M(\Delta(\alpha_n, K_0; \Omega)) = \tilde{C}(\alpha_n) < 1/n$$

とすることができる．$\overline{\alpha_n}$ で α_n の複素共役をあらわし，$\beta_n = \alpha_n \cup \overline{\alpha_n}$ とおく．このとき β_n は $\{|z|=1\}$ と K_0 を分離するから，Ω に関する仮定により．

$$\log 2|z|/\log 2 \leqq \tilde{\omega}_z(\beta_n) \qquad \text{in } \Omega - K_0 \ (n=1,2,\cdots)$$

が示される．これより

$$\tilde{C}(\beta_n) \geqq 2/\log 2$$

が得られる．しかし，他方，$\tilde{C}(\beta_n) \leqq 2\tilde{C}(\alpha_n) < \frac{2}{n}$ である．これは矛盾である．故に定理は証明された．

§3 Koebe の定理の一般化

R を双曲型リーマン面とし，ρ を R_0 上の距離とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は R_0 内の点列で，R 内に集積点をもたず、ある $\delta > 0$ に対して，$\rho(a_n, b_n) > \delta$ $(n=1,2,\cdots)$ となるものとする．各 n に対して，$\alpha_n \in C_{a_n, b_n}(R_0)$ をとり，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は R 内に集積しないとする．f は R 上で定義されている正則函数で，w_0 は複素平面 $\mathbb{C}$ 内の点とする．

定義5. $\lim_{n\to\infty} \max_{z\in\alpha_n} |f(z)-w_0| = 0$ となるのは $f(z)\equiv w_0$ のときに限るとき, Koebe の定理が組 (f, ρ) に対して成り立つという.

定理4 ([1]). $\rho = H_z\ (z\in R)$ で, f が有界ならば, Koebe の定理が組 (f, H_z) に関して成り立つ.

定義6. $r>0$ に対して,

$$G(r) = f^{-1}(\{|w-w_0|<r\}),\ A(r) = \iint_{G(r)} \left(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\right)^2 dx\,dy$$

$(z = x+iy)$ とおく.

このとき, もし, $\varliminf_{r\to 0} A(r)/r^2 < \infty$ ならば, w_0 は Beurling の意味で *ordinary point* であるという.

我々は Koebe の定理をつぎのように拡張する. これが我々の主定理である.

定理5. $\rho = d$ で, w_0 が f の *ordinary point* ならば, Koebe の定理が組 (f, d) に関して成り立つ.

証明. $f(z)\not\equiv w_0$ と仮定する. $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を単調減少して 0 に近づく実数列とする. 各 n に対して,

$$\bar{F}_n = f^{-1}(\{|w - w_0| \leqq r_n\})$$

とおく．n_0 を固定する．十分大きな n に対して，$\alpha_n \subset \bar{F}_{n_0}$ となるから

$$0 < \delta \leqq d(a_n, b_n) \leqq M(\Delta(\alpha_n, K_0; R))$$
$$\leqq M(\Delta(\bar{F}_{n_0}, K_0; R)) = \tilde{C}(\bar{F}_{n_0})$$

が得られる．他方，Z. Kuramochi は [4] の定理9の証明のなかで，$\tilde{C}(\bar{F}_n) \to 0$ as $n \to \infty$ を示している．したがって，これは矛盾である．故に定理は証明された．

系． K_0 を R 上の開円板とする．l_1, l_2 を K_0 の中心から出発する正則な Green 曲線で，$d(l_1 - K_0, l_2 - K_0) > 0$ となるものとする．$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は R 内に集積しない弧の列で，各 n に対して，$l_1 \cap \alpha_n \neq \phi$, $l_2 \cap \alpha_n \neq \phi$ とする．このとき，R 上の正則函数 $f(z)$ が

$$\lim_{n\to\infty} \max_{z\in\alpha_n} |f(z) - w_0| = 0$$

を満し，w_0 が f の ordinary point ならば，$f(z) \equiv w_0$ である．

定理3を使うことによって，次の定理が得られる．

定理6． 定理4と定理5における仮定は独立である．

References

[1] N. Boboc and G. Mocanu: Sur la notion de métrique harmonique sur une surface riemannienne hyperbolique. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Romaine 4 (52), (1961), 1 - 21.

[2] C. Constantinescu: Ideale Randkomponenten einer Riemannschen Fläche. Rev. Math. Pures Appl., 4 (1959), 43 - 76.

[3] C. Constantinescu and A. Cornea: Ideale Ränder der Riemannscher Flächen. Springer Verlag, 1963.

[4] Z. Kuramochi: Correspondence of boundaries of Riemann surfaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I 17 (1963), 96 - 122.

[5] T. Kuusalo: Generalized conformal capacity and quasiconformal metrics. Seminar on Teichmüller Spaces and Quasi-conformal Mappings, (Braşov, Romania, 1969).

[6] R. Näkki: Continuous boundary extension of quasiconformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I 511 (1972), 1 - 10.

[7] H. Tanaka: Metrics induced by capacities and boundary behaviors of quasiconformal mappings on Riemann surfaces. Hokkaido Math. J. 5 (1976), No. 1, 145 - 154.

[8] H. Tanaka: A generalization of Koebe's theorem to a Riemann surface. To appear.